Lista 14 – Gabarito

1ª Questão

r_{ST} = Distância Sol-Terra.

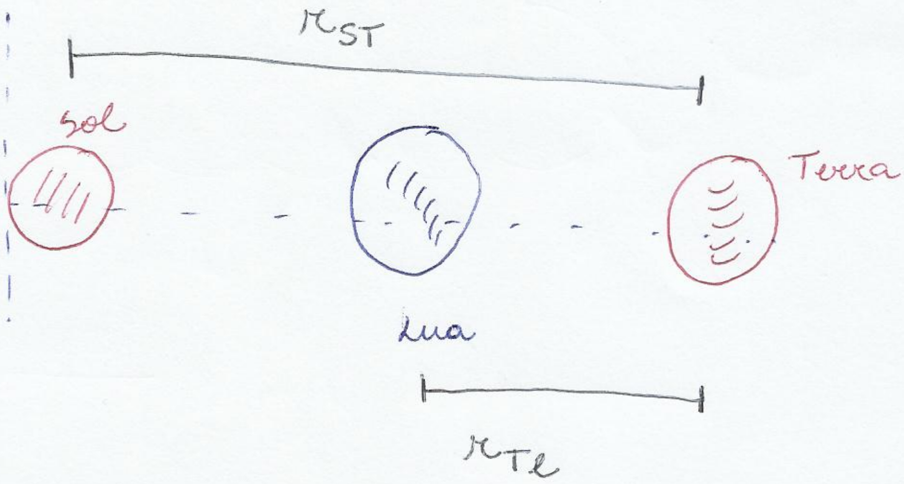
$r_{ST} = 1{,}496 \times 10^{11}\,m$

r_{TL} = Distância Terra-Lua

$r_{TL} = 3{,}84 \times 10^{8}\,m$

M_S = massa do Sol $= 1{,}99 \times 10^{30}\,kg$
M_T = " da Terra $= 5{,}98 \times 10^{24}\,kg$
M_L = " da Lua $= 7.36 \times 10^{22}\,kg$

Eclipse solar →
- Lua, Terra e Sol estão alinhados
- A Lua encontra-se entre a Terra e o Sol



Logo a distância entre o sol e a Lua (r_{SL}) é

$$r_{SL} = r_{ST} - r_{TL}$$

$$= 1.496 \times 10^{11} - 3,84 \times 10^{8}$$

$$\boxed{r_{SL} = 1,492 \times 10^{11} \text{ m}}$$

Assim:

a)

$$F_{ST} = \frac{G M_S M_T}{r_{ST}^2}$$

$$F_{ST} = \frac{(6.67 \times 10^{-11})(1.99 \times 10^{30})(5.98 \times 10^{24})}{(1.496 \times 10^{11})^2}$$

$$\boxed{F_{ST} = 3.55 \times 10^{22} \text{ N}}$$

b) $$F_{TL} = \frac{(6.67\times10^{-11})(5.98\times10^{24})(7.36\times10^{22})}{(3.84\times10^{8})^2}$$

$$\boxed{F_{TL} = 1.99\times10^{20}\ N}$$

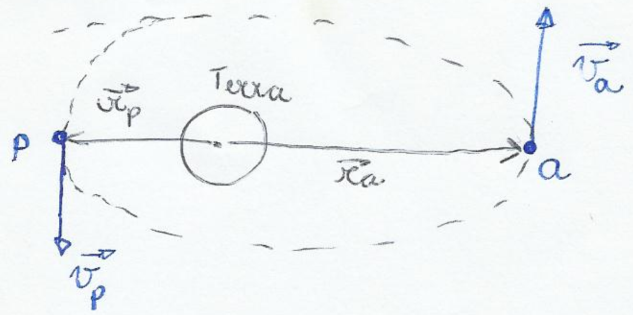
c) $$F_{SL} = \frac{(6.67\times10^{-11})(1.99\times10^{30})(7.36\times10^{22})}{(1.492\times10^{11})^2}$$

$$\boxed{f_{SL} = 4.39\times10^{20}\ N}$$

É interessante observarmos que a força exercida pelo sol sobre a lua é bem mais forte que a força exercida pela Terra sobre a lua. Assim, temos que a lua orbita mais o sol do que ~~ela~~ orbita a Terra.

2ª Questão

2



Perigeu – Distância mínima entre o satélite e a Terra, enquanto que a máxima distância chama-se apogeu.

⟹ Como o satélite move-se do perigeu ao apogeu, e afasta-se cada vez mais da Terra. Assim, a componente da força gravitacional exercida pela Terra sobre o satélite é oposta ao vetor velocidade.

O trabalho, feito sobre o satélite, é negativo e o que causa sua desaceleração, de acordo com o teorema trabalho - energia. De modo que, esperamos que a velocidade no apogeu seja menor do que no perigeu.

O momento angular do satélite em relação a Terra é

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{r} \times m\vec{v} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

A magnitude nas posições de interesse são:

$$L_a = m_a r_a v_a \text{ (Apogeu)} \qquad L_p = m_p r_p v_p$$

Como o satélite se move em uma órbita elíptica em torno da terra, seu momento angular é constante e temos:

$$\cancel{m_a} r_a v_a = \cancel{m_p} r_p v_p \qquad \boxed{v_a = \frac{r_p}{r_a} v_p}$$

$$m_a = m_p = m$$

3ª Questão

⟹ Inicialmente determinamos o raio da órbita geossíncrona e em seguida, calculamos a energia necessária p/ colocar o satélite nesta órbita.

Órbita geossíncrono - aquela em que o satélite permanece sobre um único local da Terra (durante todo período)

⟶ O período T da órbita deve ser igual a um dia, ou seja, T = 86400 s. Isso significa, que o satélite gasta o mesmo tempo para viajar em torno da Terra, que esta para dar uma volta em torno de seu próprio eixo.

Pela 3ª Lei de Keppler

$$T^2 = K r^3$$

P/ a Terra temos.

$$K_T = \frac{4\pi^2}{GM_T} = 9.89 \times 10^{-14} \ s^2/m^2$$

$$r^3 = \frac{T^2}{K_T} \longrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{K_T}}$$

$$r = \sqrt{\frac{(86400)^2}{9.9 \times 10^{-14}}} \Rightarrow \boxed{r_G = 4.23 \times 10^7 \ m}$$

onde $r_G =$ raio da órbita geossíncrona.

Mas, qual o raio inicial da órbita do satélite (imediatamente antes de ser lançado), assim:

$$R_T + 280\ km = R_T + 280 \times 10^3 = 6.65 \times 10^6\ m = R_i$$

raio da Terra.

$$\boxed{R_i = 6.65 \times 10^6\ m}$$

Lembrando que:

$$E = -\frac{GM_T m}{2R}$$

$M_T =$ Massa da Terra $= M$

$m =$ Massa do satélite

$$R_f = R_G$$

$$E_i = -\frac{GMm}{2R_i} \qquad E_f = -\frac{GMm}{R_f}$$

$$\Delta E = E_f - E_i = E_{dispositivo}$$

$$\Delta E = -\frac{GMm}{2}\left(\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R_i}\right)$$

$$\Delta E = \frac{-(6.67\times10^{-11})(5.98\times10^{24})(470)}{2} \times \left(\frac{1}{4.23\times10^7} - \frac{1}{0.665\times10^7}\right)$$

$$\boxed{\Delta E = 1.19 \times 10^{10}\ J}$$

4ª Questão

Considerando a velocidade de escape lunar como a velocidade de escape a partir da superfície de uma lua estacionária sozinha no universo.

M = massa da lua
M_T = " da Terra
R_ℓ = Raio da lua
R_T = " da Terra.

v_{esc} = Veloc. escape da lua
v_{lanc} – Velocidade de lançamento
v_{impact} – Velocidade de impacto
m_2 = massa da rocha lançada sobre a terra.

Considerando que:

R_m = Raio da Rocha na lua
R_{m_2}

$$\frac{1}{2} m v_{esc}^2 = \frac{GMm}{R_\ell}$$

Onde:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R_\ell}} \qquad v_{lanc} = 2\sqrt{\frac{2GM}{R_\ell}}$$

Para o vôo da lua p/ a Terra, temos:

$$\boxed{K_i + U_i = K_f + U_f}$$

$$\frac{1}{2} m v_{lanc}^2 - \frac{GmM}{R_\ell} - \frac{GmM_T}{r_{T\ell}} = \frac{1}{2} m v_{impact}^2 - \frac{GmM_m}{r_{m_2}} - \frac{GmM_T}{R_T}$$

$$\frac{4 G M_m}{R_m} - \frac{G M_m}{R_m} - \frac{G M_T}{r_{Te}} = \frac{1}{2} v_{impact}^2 - \frac{G M_m}{r_{m2}} - \frac{G M_T}{R_T}$$

$$v_{impact} = \left[2G\left(\frac{3M_m}{R_m} + \frac{M_m}{r_{m2}} + \frac{M_T}{R_T} - \frac{M_T}{r_{Te}}\right)\right]^{1/2}$$

$$= \left[2G\left(\frac{3 \times 7.36 \times 10^{22}\ kg}{1.74 \times 10^6\ m} + \frac{7.36 \times 10^{22}\ kg}{3.84 \times 10^8\ m} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{5.98 \times 10^{24}\ kg}{6.37 \times 10^6\ m} - \frac{5.98 \times 10^{24}\ kg}{3.84 \times 10^8\ m}\right)\right]^{1/2}$$

$$= \left[2G\left(1.27 \times 10^{17} + 1.92 \times 10^{14} + 9.39 \times 10^{17} - 1.56 \times 10^{16}\right) Kg/m\right]^{1/2}$$

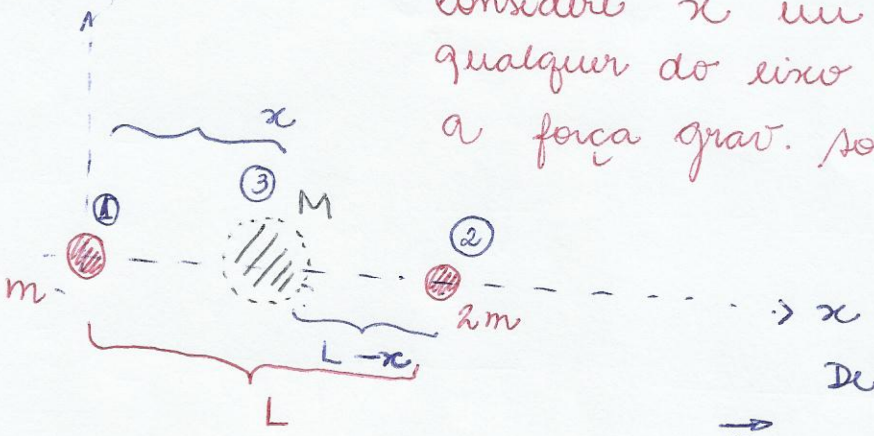
$$= \left[2.(6.67 \times 10^{-11}\ N.m^2/Kg^2).\ 10{,}5 \times 10^{17}\ Kg.m\right]^{1/2}$$

$$\boxed{v_{impact} = 11{,}8\ Km/s}$$

5ª Questão

Considere x um ponto qualquer do eixo e que neste ponto a força grav. sobre M é nula.

A)



De modo geral:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

Aqui, no geral, temos

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{x}$$

$$|\vec{F}_{13}| = |\vec{F}_{23}|$$

$m_1 = m$

$m_2 = 2m$

Assim

$$\frac{GMm_1}{x^2} = \frac{GMm_2}{(L-x)^2}$$

$$\frac{\cancel{G}\cancel{M}\cancel{m}}{x^2} = \frac{\cancel{G}\cancel{M}2\cancel{m}}{(L-x)^2}$$

$$(L-x)^2 = 2x^2$$

Tomando a raiz em ambos os lados da equação, temos:

$$L - x = \sqrt{2}\,x$$

$$L = \sqrt{2}\,x + x = (1+\sqrt{2})\,x$$

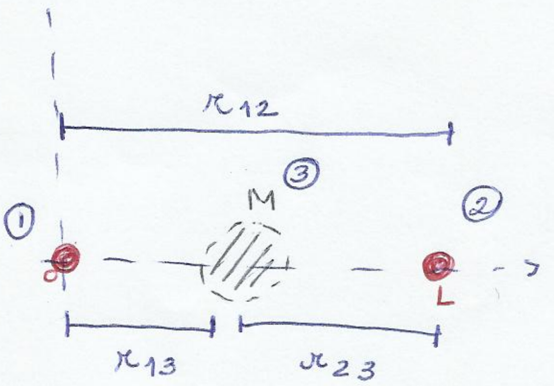
$$x = \frac{L}{(1+\sqrt{2})} \cdot \frac{(1-\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})} = \frac{L(1-\sqrt{2})}{1-2} = -L(1-\sqrt{2})$$

$$\boxed{x = L(\sqrt{2}-1)}$$

$$x = 0{,}73L$$

B)

$$U = -\frac{GMm}{r}$$



$$U = U_{total} = U_{13} + U_{23} + U_{12}$$

$$r_{13} = 0{,}73L$$

$$r_{23} = L - x = L - 0{,}73L = 0{,}27L$$

$$r_{12} = L$$

$$U = -\frac{GMm}{0{,}73L} - \frac{GM2m}{0{,}27L} - \frac{G2m^2}{L}$$

$$\boxed{U = -\frac{Gm}{L}\left(\frac{M}{0{,}73} + \frac{2M}{0{,}27} + 2m\right)}$$